UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
MATEMÁTICAS IV (MA-2115)

Elaborado por
Samuel Alonso
14-10028
Ing. Telecom

6 de marzo de 2017

Criterios de Convergencia, Conjunto y Radio de Convergencia, Serie de MacLaurin, Curvas Ortogonales

Resolución Primer Parcial 2015 Abril-Julio Tipo A

1. Decidir si las siguientes series numéricas convergen o divergen

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3n}\right) \qquad c)\ \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$$

a) De entrada, es fácil notar que, puesto que la función arcoseno es bastante incómoda para manejar, el criterio de la raíz y el del cociente no serán de mucha ayuda para decidir si la serie converge o no. Sin embargo, notemos que la expresión no es propiamente $\arcsin(n)$, sino $\arcsin(1/n)$. Ésta expresión tiene la ventaja de que tiende a 0 a medida que n tiende al infinito. Entonces, hallar el primer término de la expansión de Taylor alrededor de $x = 0$ puede que de una pista acerca del comportamiento de $\arcsin(1/n)$ a medida que $n \to \infty$. Si tomamos $f(x) = \arcsin(x)$, el primer término de la expansión de Maclaurin de la función arcoseno resulta 0.

$$\frac{f^{(0)}(0)\cdot x^0}{0!} = 0.$$

Por ende, la función $\arcsin(1/n)$ se comporta como la función 0 a medida que n tiende al infinito. Este también es el caso para $1/n$. Entonces, como $\arcsin(1/n)$ y $1/n$ parecen tener un comportamiento similar a medida que $n \to \infty$, y como $\arcsin(1/n) > 0,\ n = 1,\ 2,\ \ldots$, podemos utilizar el criterio del paso al límite para analizar la convergencia de la serie. Tomemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}},$$

Puesto que ambos términos tienden a cero, podemos aplicar la regla de L'Hospital, y

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}\frac{1}{\sqrt{1-(1/n)^2}}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1-(1/n)^2}} = 1,$$

lo cual muestra que las sucesiones son asintóticamente similares. Luego, por el criterio de comparación por paso al límite, la divergencia de la serie armónica implica la divergencia de

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) Si separamos la serie como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n}\right),$$

recocemos inmediatamente que la serie de la derecha es un múltiplo de la serie armónica, de divergencia conocida, y que la serie de la izquierda es una serie geométrica con razón menor a 1, y por tanto convergente. Puesto que la suma de una serie divergente con una serie convergente es divergente, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{1}{3n}\right)$$

diverge.

c) A pesar de que la expresión

$$\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$$

puede que se vea intimidante, decidir la convergencia de la serie resultará bastante sencillo. Primero, veamos que como n, $\ln(n)$ y $\ln(\ln(n))$ son funciones monótonamente crecientes, entonces $1/(n\ln(n)\ln(\ln(n)))$ es monótonamente decreciente después de un cierto $n \geq N$; en particular, $N = 27$ (¿Por qué?). Luego, observando que

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(\ln(x))\right)=\frac{1}{x\ln(x)},$$

es claro que el camino a seguir es utilizar el criterio integral para determinar la convergencia de la serie. Consideremos únicamente la cola de la serie, empezando en el N tal que $1/(n\ln(n)\ln(\ln(n)))$ sea monótonamente decreciente (puesto que el criterio lo requiere).

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))},$$

entonces, de acuerdo el criterio integral, la serie converge o diverge según la convergencia de

$$\int_{N}^{\infty}\frac{1}{t\ln(t)\ln(\ln(t))}dt.$$

Tomando la sustitución $u = \ln(\ln(t))$, $C = \ln(\ln(N))$, la integral resulta

$$\int_{C}^{\infty}\frac{1}{u}du.$$

Pero esta integral impropia es de conocida divergencia. Por ende, la divergencia de la integral impropia implica la divergencia de

$$\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))},$$

y por tanto, de

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}.$$

2. Hallar el conjunto de convergencia y determinar el radio de convergencia para la serie de potencias

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Aplicando el criterio de la raíz, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-3)^n(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n|x-1|^n}{\sqrt{n+1}}} = 3|x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2n}}}.$$

Pero como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2n}}} = \exp\left(-\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{2n}\right),$$

donde

$$-\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{2n} = 0,$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2n}}} = 1.$$

Luego,

$$3|x-1| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{2n}}} = 3|x-1|,$$

y entonces, de acuerdo con el criterio de la raíz, para garantizar que la serie de potencias converga absolutamente basta con tomar

$$|x-1| < \frac{1}{3}.$$

Por ende, el radio de convergencia de la serie de potencias es $R = 1/3$. Para hallar el conjunto de convergencia sólo falta verificar la convergencia en $|x-1| = 1/3$. Tomando $(x-1) = 1/3$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n(x-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}.$$

Véase que la serie es alternada, y además, que $1/\sqrt{n+1}$ es monótonamente decreciente, con $1/\sqrt{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$. Por tanto, la serie satisface las condiciones del criterio de Leibniz (criterio de la serie alternada), lo cual implica que es convergente en $(x-1) = 1/3$. En $-1/3$ obtenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

A diferencia del caso para $1/3$, esta serie es de conocida divergencia. Por ende, la serie no converge para $(x-1) = -1/3$. Finalmente, el conjunto de convergencia resulta $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1/3 < x-1 \leq 1/3\}$, siendo $R = 1/3$ el radio de convergencia de la serie de potencias.

3. Hallar el desarollo en serie de Maclaurin de la función

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Obtener la serie de Maclaurin de $f(x)$ es sencillo si se recuerda que la serie de Maclaurin de e^z viene dada por

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

y cuyo radio de convergencia es $R = \infty$. Es decir, la serie converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{R}$. Si tomamos $z = -t^2$, entonces

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!},$$

y esta serie converge absolutamente para todo $t \in \mathbb{R}$. Como esta serie converge uniformemente (por ser una serie de potencias), puede integrarse término a término para obtener la serie de Maclaurin de $f(x)$.

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Finalmente,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1},$$

y su radio de convergencia es, por ser la integral de una serie de potencias, al menos igual a R, pero como $R = \infty$, entonces la serie de potencias de $f(x)$ tiene radio de convergencia $R' = \infty$.

4. Resolver la ecuación de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas

$$y = a \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \ a \in \mathbb{R}.$$

Veamos que todas las curvas

$$y = a \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -a \sin x$$

satisfacen la ecuación diferencial

$$y' = -a \cos x.$$

Luego, una trayectoria u ortogonal a y arbitraria satisface que

$$u' = -\frac{1}{y'} = \frac{1}{a} \sec x.$$

Por ende, una integración directa resulta en u.

$$u = \frac{1}{a} \ln|\sec x + \tan x|,$$

donde hemos escogido la constante de integración como cero. Finalmente, la familia de trayectorias ortogonales es

$$u = \frac{1}{a} \ln|\sec x + \tan x|, \ a \in \mathbb{R}.$$

Nota: Este material fue elaborado por Samuel Alonso con ejercicios obtenidos del primer parcial de Abril-Julio del 2015 (tipo A), y fue realizado para el uso de toda la comunidad académica.

Samuel Alonso
Carnet: 14-10028
Ingeniería en Telecomunicaciones
Twitter: @zickpic

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com